ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

MATHEMATIQUES II

Option économique

Mercredi 12 mai 1993 de 8h à 12h

Sont autorisées :

- *Règles graduées.*
- *Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.*

L'objet de ce problème est l'étude d'une suite de jets d'un dé équilibré.
Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires d'analyse, et on étudie dans la partie II l'obtention de r as consécutifs, où r est un entier donné supérieur ou égal à 2.

PARTIE 1

On se propose, dans cette partie, d'obtenir la limite des suites réelles $u = (u_n)$ définies pour $n \geq 1$ et vérifiant pour tout entier naturel $n \geq r$ la relation:

$$(1) \qquad u_n + \frac{1}{6}u_{n-1} + (\frac{1}{6})^2 u_{n-2} + \ \ldots \ + (\frac{1}{6})^{r-1} u_{n-r+1} \ = \ (\frac{1}{6})^r.$$

1°) On suppose dans cette question que $r = 2$. Exprimer u_n en fonction de n et de u_1, puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2°) On étudie dans cette question les suites $u = (u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant (1).

a) Déterminer une suite constante $c = (c_n)_{n\geq 1}$ vérifiant la relation (1).

b) Etablir que $u = (u_n)_{n\geq 1}$ vérifie la relation (1) si et seulement si la suite $v = (v_n)_{n\geq 1}$, définie par $v = u - c$, vérifie pour tout entier naturel $n \geq r$ la relation:

$$(2) \qquad v_n + \frac{1}{6}v_{n-1} + (\frac{1}{6})^2 v_{n-2} + \ \ldots \ + (\frac{1}{6})^{r-1} v_{n-r+1} \ = \ 0.$$

c) Etant donnée une suite $v = (v_n)_{n\geq 1}$ vérifiant (2), on pose:

$$M \ = \ \max(|3v_1|, |3^2 v_2| \ldots, |3^{r-2} v_{r-2}|, |3^{r-1} v_{r-1}|).$$

Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$: $|3^n v_n| \leq M$, et en déduire la limite de cette suite $(v_n)_{n\geq 1}$.

d) En déduire enfin la limite d'une suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant (1).

PARTIE 2

On se propose, dans cette partie, d'étudier la réalisation de suites de r as consécutifs au cours de la suite de jets d'un dé décrite dans le préambule.
Pour tout entier $n \geq 1$, on désignera par S_n l'événement:

"Obtenir un as à la $n^{ème}$ expérience".

1°) Probabilité d'obtenir au moins une suite de r as.

On considère pour tout entier $n \geq 1$ l'événement E_n = "$S_{rn-(r-1)}$ et ... et S_{rn-1} et S_{rn}":

"Obtenir un as aux $[rn-(r-1)]^{ème}$, ... , $[rn-1]^{ème}$ et $[rn]^{ème}$ jet du dé".

a) Déterminer la probabilité des événements suivants:

$$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{E}_k = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ldots \cap \overline{E}_n \quad ; \quad \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{E}_k = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ldots \cap \overline{E}_n \cap \ldots$$

(intersection des complémentaires de E_1, E_2, ... , E_n, puis de E_1, E_2, ... , E_n, ...).

b) En déduire que l'obtention de r as consécutifs est un événement réalisé avec une probabilité égale à 1.

2°) Probabilité d'obtenir une suite de r as s'achevant à la n° expérience.

Pour tout entier $n \geq r$, on désigne par U_n l'événement:

"Obtenir une suite de r as consécutifs s'achevant au $n^{ème}$ jet du dé, c'est à dire une suite d'as aux $[n-(r-1)]^{ème}$, ... , $(n-1)^{ème}$, $n^{ème}$ jet du dé, dont aucun d'eux n'a déjà été comptabilisé dans une suite antérieure de r as consécutifs".

Par exemple, si r = 3 et si l'on désigne par S l'obtention d'un as et par E l'obtention d'un autre numéro, la suite de jets d'un dé représentée par:

$$\underline{S\ S\ S}\ \underline{S\ S\ S}\ S\ E\ E\ \underline{S\ S\ S}\ S\ S\ E\ S\ E\ \underline{S\ S\ S}\ S\ E\ \ldots$$

mène à la réalisation des événements U_3, U_6, U_{12}, U_{20}, ... , c'est à dire de suites de 3 as consécutifs s'achevant aux 3ème, 6ème, 12ème, 20ème, ... jets du dé.

On note enfin u_n la probabilité de l'événement U_n.

On posera par convention $u_o = 1$ et $u_1 = u_2 = \ldots = u_{r-1} = 0$.

a) Montrer que la réalisation de l'événement "$S_{n-(r-1)}$ et ... et S_{n-1} et S_n" implique la réalisation d'un et un seul des événements $U_{n-(r-1)}$, ... , U_{n-1}, U_n pour $n \geq r$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifie (1).

b) Quelle est la limite L de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

En déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour qu'une suite de 2 As consécutifs s'achève au $n^{ème}$ jet du dé.

3°) Etude de la première suite de r as consécutifs.

On désigne par X la variable aléatoire indiquant le numéro n du jet du dé où, *pour la première fois,* s'achève une suite de r as consécutifs.

Dans l'exemple donné dans la question 2, X prend donc la valeur 3.

On posera donc par convention $P(X = 0) = P(X = 1) = \ldots = P(X = r-1) = 0$.

a) Vérifier à l'aide des résultats obtenus à la question 1 que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} P(X = n) = 1.$$

b) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0, 1[:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

Justifier la convergence de cette série, puis établir à l'aide de (1) que:

$$U(x) = 1 + \frac{(\frac{x}{6})^r}{1-(\frac{x}{6})^r} \frac{1-\frac{x}{6}}{1-x}.$$

c) Pour tout entier $n \geq r$, montrer que, si l'événement U_n est réalisé, une première suite de r as consécutifs s'est achevée à l'un des n premiers jets du dé.
En déduire la relation suivante pour tout entier $n \geq 1$:

$$(3) \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) u_{n-k}.$$

d) A tout couple de séries convergentes à termes positifs Σa_n et Σb_n, on associe la série dite série-produit Σc_n, où $c_n = a_0 b_n + \ldots + a_k b_{n-k} + \ldots + a_n b_0$.
Vérifier que l'on a pour tout entier naturel n:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_k . \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k.$$

En déduire la convergence et la somme de la série-produit Σc_n.
e) On pose pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0, 1]:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) x^n.$$

Justifier la convergence de cette série, puis déterminer une relation liant U(x) et G(x) pour tout réel x appartenant à [0, 1[(on pourra multiplier (3) par x^n et sommer les égalités obtenues pour $n \geq 1$).
f) En déduire l'expression de G(x) pour $0 \leq x < 1$, puis vérifier que G est continue, y compris en x = 1.

4°) Temps moyen d'attente de la première suite de r as consécutifs.
a) On *admet* que l'on peut dériver terme à terme la fonction G sur [0, 1].
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X, numéro de l'expérience où s'achève la première suite de r as consécutifs.
b) On effectue à chaque seconde un jet du dé.
Donner dans un tableau en secondes, minutes, heures, jours, années le temps moyen d'attente de la première suite de r as consécutifs lorsque r = 5, r = 10, r = 25.
(A titre de comparaison, l'âge de l'Univers est estimé à 15 milliards d'années).

***